B- Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1)a- Montrer que pour tout réel strictement positif x, on a :

$$\frac{1}{e^x-1} = e^{-x}+e^{-2x}+\ldots+e^{-nx}+\frac{e^{-nx}}{e^x-1}.$$

b- Montrer que $\forall x \in IR^+; 0 \le \int_0^x f(t)e^{-nt}dt \le \frac{a(2-a)}{n}$.

c- x étant un réel positif, calculer $I_n(x) = \int_0^x t^2 e^{-nt}dt$.

d- Montrer que $I_n(x)$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$.

2)a- Montrer que $\forall x \in IR^+$ on a : $\sum_{k=1}^{n} I_k(x) = F(x) - \int_0^x f(t)e^{-nt}dt$

En déduire que la fonction H_n définie sur IR^+ par :
$H_n(x) = \int_0^x f(t)e^{-nt}dt$ admet une limite ℓ_n lorsque x tend vers $+\infty$
vérifiant $L-\ell_n = 2\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}\right)$.

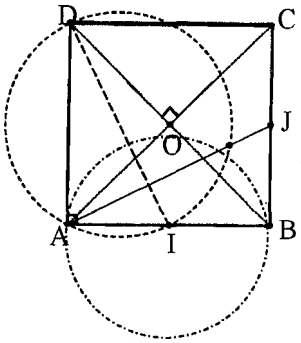
b- En utilisant le resultat établi à la question **B-1)b-**,montrer que la suite $(\ell_n)_{n\in IN^*}$ converge vers 0.

c- Soit $(u_n)_{n\in IN^*}$ la suite définie par : $u_n = 1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}$

Montrer que cette suite est convergente et a pour limite le réel L' tel que L=2L'.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1



1/a- AB=CD≠ 0

$\Rightarrow$ il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et B sur D.

$$\begin{cases} f(A) = C \\ f(B) = D \end{cases} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) \equiv \pi \quad [2\pi] \text{ est l'angle de f}$$